INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ETUDES ECONOMIQUES

ECOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ECONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ELEVES TITULAIRES STATISTICIENS ECONOMISTES
OPTION MATHEMATIQUES

JUIN 1993

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES
(Durée : 4 heures)

Si h est une bijection d'un ensemble X et si k est un entier relatif, on notera h^k la bijection de X définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} h^0 = Id \\ h^{k+1} = h^k \circ h = h \circ h^k \end{cases}$$

où Id désigne l'application identité .

Un point fixe de h est un point $x \in X$ tel que $h(x) = x$, un point périodique est un point $x \in X$ tel que $h^k(x) = x$ pour un certain entier $k \geqslant 1$.

I

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des difféomorphismes f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ qui vérifient la propriété :

$$(P) \quad \begin{cases} f(z) - f(z') \in \mathbb{Z}^2 \\ f^{-1}(z) - f^{-1}(z') \in \mathbb{Z}^2 \end{cases} \quad \text{si} \quad z - z' \in \mathbb{Z}^2 .$$

1) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de l'ensemble des difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1, muni de la loi de composition des applications.

2) a) Montrer qu'une application linéaire u appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec a, b, c, d entiers} \quad \text{et } ad - bc = \pm 1 \ .$$

b) Montrer que l'ensemble E des applications linéaires appartenant à $\mathcal{E}$ est un sous-groupe de $\mathcal{E}$.

3) Soit $f \in \mathcal{E}$ et $\omega \in \mathbb{Z}^2$. Que peut-on dire de l'application

$$\Theta_\omega : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z & \longrightarrow & f(z + \omega) - f(z) \end{array} \quad ?$$

4) En déduire qu'il existe une unique application linéaire $u = L(f) \in E$ et une unique application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 vérifiant

$$\varphi(z') = \varphi(z) \quad \text{si} \quad z' - z \in \mathbb{Z}^2$$

telles que $f = u + \varphi$; montrer que l'application $L : \mathcal{E} \longrightarrow E$ est un morphisme de groupe.

Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{R}^2$ et tout $\omega \in \mathbb{Z}^2$:

$$f(z + \omega) = f(z) + u(\omega) \ .$$

5) Parmi les applications suivantes, indiquer celles qui appartiennent à $\mathcal{E}$ et celles qui n'y appartiennent pas.

$f_1 : z = (x,y) \longrightarrow (x + a, y + b)$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;

$f_2 : z = (x,y) \longrightarrow (3x + y + 1, x + y)$,

$f_3 : z = (x,y) \longrightarrow \left(x + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x, y + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi y\right)$,

$f_4 : z = (x,y) \longrightarrow (x + y, y + \sin 2\pi (x + y))$.

II

Soit S^1 l'ensemble des nombres complexes de module 1 .

On définit l'application

$$\pi : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$z = (x,y) \longrightarrow (e^{2i\pi x}, e^{2i\pi y}) .$$

1) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, il existe une unique bijection $F = \Phi(f) : S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \times S^1$ telle que

$$(Q) : \quad F \circ \pi = \pi \circ f .$$

Montrer que Φ est un morphisme de $\mathcal{E}$ dans l'ensemble des bijections de $S^1 \times S^1$.

2) Soit $z = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que $\pi(z)$ est un point fixe de F^k si et seulement si $f^k(z) - z \in \mathbb{Z}^2$.

3) Soit $u \in E$ et $U = \Phi(u)$ la bijection de $S^1 \times S^1$ dans $S^1 \times S^1$ définie par la relation (Q). On définit pour tout entier $q \geqslant 1$ l'ensemble

$$X_q = \{z = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (qx,qy) \in \mathbb{Z}^2\} .$$

a) Montrer que $u(X_q) \subset X_q$.

b) En déduire que tout point de $\pi(X_q)$ est un point périodique de U.

c) L'application U peut-elle avoir un nombre fini de points périodiques ?

4) On suppose que u a une valeur propre non réelle.

a) Quelles valeurs peut prendre le déterminant de u, la trace de u ?

b) En déduire qu'il existe un nombre n, indépendant de u tel que u^n est l'application identité et trouver le plus petit entier ayant cette propriété.

c) Quels sont les points périodiques de U ?

III

1) Montrer que 1 est valeur propre de $u \in E$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^2$ tel que $u + \lambda$ n'a pas de point fixe.

2) Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{E}$ telle que $L(f) = Id$ et telle que $F = \Phi(f)$ n'ait aucun point périodique.

3) Soit $u : (x,y) \longrightarrow (x+y,y)$.

Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{E}$ telle que $F = \Phi(f)$ n'ait aucun point périodique et telle que $L(f) = u$.

4) Plus généralement, montrer que si 1 est valeur propre de $u \in E$, il existe $f \in \mathcal{E}$ telle que $L(f) = u$ et telle que $F = \Phi(f)$ n'ait aucun point périodique.

IV

On se fixe dans cette partie un élément $f \in \mathcal{E}$ tel que $u = L(f)$ n'a pas de valeur propre égale à 1.

On suppose que f est de classe C^2 et on va montrer que f a nécessairement un point fixe.

On écrira : $u(x,y) = (ax + by, cx + dy)$.

On munit $\mathbb{R}^2$ du produit scalaire :

$$< (x_1,y_1) , (x_2,y_2) > = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

et on note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée. On définit alors le produit mixte :

$$[(x_1,y_1) , (x_2,y_2)] = x_1 y_2 - y_1 x_2 .$$

Pour toute application $h : (x,y) \longrightarrow (h_1(x,y), h_2(x,y))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de classe C^1, on note

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) , \frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y)\right)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) , \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y)\right)$$

les dérivées partielles de h.

1) On définit les application $g = f - Id$ et $v = u - Id$.

a) Montrer qu'il existe des réels $A > 0$ et $B > 0$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on ait :

$$A \|(x,y)\| \leqslant \|v(x,y)\| \leqslant B \|(x,y)\| .$$

b) En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $\|(x,y)\| > R$, le produit scalaire $< v(x,y) , g(x,y) >$ soit strictement positif.

2) On définit sur $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y)\| > R\}$ une application $\alpha : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et deux formes différentielles ω et $\tilde{\omega}$ par les relations :

$$\alpha(x,y) = \text{Arctan} \frac{[v(x,y) , g(x,y)]}{< v(x,y) , g(x,y) >}$$

$$\omega(x,y) = \frac{\left[g(x,y) , \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right]}{\|g(x,y)\|^2} dx + \frac{\left[g(x,y) , \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right]}{\|g(x,y)\|^2} dy$$

$$\tilde{\omega}(x,y) = \frac{\left[v(x,y) , \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right]}{\|v(x,y)\|^2} dx + \frac{\left[v(x,y) , \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right]}{\|v(x,y)\|^2} dy .$$

a) Quelle est la signification géométrique de $\alpha(x,y)$?

b) Montrer que pour tout vecteur V_1, V_2, V_3 de $\mathbb{R}^2$ on a :

$$[V_1,V_3] < V_1,V_2 > - < V_1,V_3 > [V_1,V_2] = < V_1,V_1 > [V_2,V_3]$$

c) En déduire l'égalité, sur W :

$$d\alpha = \omega - \tilde{\omega} .$$

3) Expliciter $\tilde{\omega}$ en fonction de a, b, c, d , et calculer l'intégrale $\int_{C_r} \tilde{\omega}$ sur un cercle C_r de rayon $r > R$. Montrer que cette intégrale est non nulle.

4) Que peut-on dire de $\int_{C_r} \omega$? En déduire que f a nécessairement un point fixe.

V

Dans cette partie, f est un élément de $\mathcal{E}$ de classe C^2 tel que $u = L(f)$ n'a pas de valeur propre (réelle ou complexe) de module égal à 1 .

1) a) Soit un entier $q \geq 1$. Montrer qu'il existe $\tilde{\omega} \in \mathbb{Q}^2$ tel que, pour tout $k \in \{1,\ldots,q\}$:

$$u^k(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega} \notin \mathbb{Z}^2 \quad .$$

b) Montrer qu'il existe un entier $q' > q$ tel que :

$$u^{q'}(\tilde{\omega}) - \tilde{\omega} \in \mathbb{Z}^2 \quad .$$

2) a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante (q_n) d'entiers naturels et une suite (ω_n) d'éléments de $\mathbb{Q}^2$ telles que :

$$u^{q_n}(\omega_n) - \omega_n \in \mathbb{Z}^2$$

$$u^{q_m}(\omega_n) - \omega_n \notin \mathbb{Z}^2 \qquad \text{si} \quad m < n \quad .$$

b) Montrer que, pour $m < n$, $\omega_n - \omega_m \notin \mathbb{Z}^2$.

3) On pose $\omega'_n = u^{q_n}(\omega_n) - \omega_n$. Montrer qu'il existe $z_n \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f^{q_n}(z_n) - z_n = \omega'_n \quad .$$

4) a) Pour tout entier $k \geq 1$, exprimer $f^{kq_n}(z_n) - z_n$ en fonction de ω'_n puis de ω_n .

b) En déduire que $z_n - z_m \notin \mathbb{Z}^2$ si $m < n$.

5) Que peut-on dire de l'ensemble des points périodiques de $\Phi(f)$?